

تحقق من فهمك :-

3) أوجد $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

(3B $g(x) = x - 6$ ، $f(x) = x^2 + 2$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$

$= g[x^2 + 2]$

$= x^2 + 2 - 6$

$= x^2 - 4$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$= f[x - 6]$

$= (x - 6)^2 + 2$

$= x^2 - 12x + 36 + 2$

$= x^2 - 12x + 38$

الفصل الثالث

٣-٧ نظريتا الباقي والعوامل

The Remainder and Factor Theorems

فيما سبق:

درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أستعمل التعويض التركيبي لأحدّد ما إذا كانت ثنائية حدٍّ عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

المفردات:

نظرية الباقي
Remainder Theorm

التعويض التركيبي
synthetic substitution

نظرية العوامل
Factor Theorm

لماذا؟

قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة:
$S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، حيث x عدد السنوات منذ العام 1418هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1438هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r}
-3x - 4 \\
x - 3\overline{\big)\,-3x^2 + 5x + 4} \\
(-)\ \underline{-3x^2 + 9x} \\
-4x + 4 \\
(-)\ \underline{-4x + 12} \\
-8
\end{array}$$

الطريقة 2: القسمة التركيبية

$$\begin{array}{c|ccc}
3 & -3 & 5 & 4 \\
 & & -9 & -12 \\
\hline
 & -3 & -4 & -8
\end{array}$$

الفصل الثالث

٧-٣ نظريتا الباقي والعوامل

The Remainder and Factor Theorems

فيما سبق:

درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أستعمل التعويض التركيبي لأحدّد ما إذا كانت ثنائية حدٍّ عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

المفردات:

نظرية الباقي
Remainder Theorm

التعويض التركيبي
synthetic substitution

نظرية العوامل
Factor Theorm

www.obeikaneducation.com

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8، وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$	عوّض العدد 3 بدلًا من x
$= -27 + 15 + 4$	اضرب
$= -8$	بسّط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضّح **نظرية الباقي**.

مفهوم أساسي — نظرية الباقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$، وكذلك:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\cdot$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

إن عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية تسمى **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيم دوال كثيرات الحدود، خصوصًا عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.



الفصل الثالث

٣-٧ نظريتا الباقي والعوامل

The Remainder and Factor Theorems

مثال 1 التعويض التركيبي

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ ، فأوجد $f(4)$ باستعمال التعويض التركيبي.

بناءً على نظرية الباقي، فإن $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 4$.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

بما أنه لا يوجد حد يحتوي على x^2، لذا ضع 0 للمحافظة على مكان عامل الحد x^2.

بما أن باقي القسمة يساوي 662 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

وللتحقق نستعمل التعويض المباشر. عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود.

$$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$$ عوّض العدد 4 بدلًا من x

$$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$$ بسّط

وعليه فإن $f(4) = 662$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر .

الفصل الثالث

٣-٧ نظريتا الباقي والعوامل

تحقق من فهمك :-

1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$.

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$$

$$f(3) = 3(3)^3 - 6(3)^2 + (3) - 11$$

$$= 81 - 54 + 3 - 11$$

$$= 19$$

(1B إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $g(-1)$.

$$g(x) = 4(-1)^5 + 2(-1)^3 + (-1)^2 - 1$$

$$g(x) = -4 - 2 + 1 - 1$$

$$= -6$$



الفصل الثالث

٣-٧ نظريتا الباقي والعوامل

The Remainder and Factor Theorems

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قيم الدالة

مبيعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. ما قيمة الأرباح في العام 1438 هـ؟

أوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملًا القسمة التركيبية.

20	0.02	−0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	−2.4	32.6	653.8
	0.02	−0.12	1.63	32.69	731.34

تقدر الأرباح بـ 73134 ريالًا تقريبًا.

الفصل الثالث
٣-٧ نظريتا الباقي والعوامل

تحقق من فهمك :-

2) **مدارس :** يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى المناطق منذ عام 1427 هـ، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدّر عدد طلاب المنطقة عام 1439 هـ.

12	2.4	-22.3	53.8	548.2
	↓	28.8	78	1581.6
	2.4	6.5	131.8	2129.8

العدد المتوقع لطلاب المحافظة عام 1439 هـ هو 21298 طالباً تقريباً



الفصل الثالث

٣-٧ نظريتا الباقي والعوامل

The Remainder and Factor Theorems

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضّح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

الفصل الثالث
٣-٧ نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

مفهوم أساسي — **نظرية العوامل**

أضف إلى مطويتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة.

مثال 3 — استعمال نظرية العوامل

حدّد ما إذا كان $x - 5$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

الخطوة 1: استعمال نظرية العوامل

بناءً على نظرية العوامل تكون ثنائية الحد $x - 5$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(5) = 0$، ولإيجاد $P(5)$، يمكنك استعمال التعويض التركيبي.

5	1	−7	7	15
		5	−10	−15
	1	−2	−3	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا؛ أي أن $P(5) = 0$ ، فإن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود.

الخطوة 2: تحليل كثيرة الحدود

بما أن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود؛ لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على النحو الآتي: $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. وتكون $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على $(x - 5)$.

تحقق مما إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا.

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$ حلّل ثلاثية الحدود

وعليه فإن $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$

تحقق: يمكنك التحقق من إجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثيرة الحدود الأصلية.



تحقق من فهمك :ـ

3) بين أن $x - 2$ عامل من عوامل كثيرة الحدود:
$x^3 - 7x^2 + 4x + 12$، ثم أوجد عواملها الأخرى.

2	1	-7	4	12
	↓	2	-10	-12
	1	-5	-6	0

بما أن باقي القسمة يساوي صفراً، إذن $x - 2$ عامل لكثيرة الحدود.

$$P(2) = (2)^3 - 7(2)^2 + 4(2) + 12$$
$$= 8 - 28 + 8 + 12$$
$$= 28 - 28$$
$$= 0$$

إيجاد العوامل الأخرى:

$$x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - 5x - 6)$$
$$= (x - 2)(x - 6)(x + 1)$$



تــــأكــد :–

مثال 1

أوجد $f(-2)$ ، $f(4)$ لكل من الدالتين الآتيتين مستعملاً التعويض التركيبي:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14 \quad (1$$

-2	2	-5	-1	14
	↓	-4	18	-34
	2	-9	17	-20

بما أن باقي القسمة يساوي 20- ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(-2) = -20$

4	2	-5	-1	14
	↓	8	12	44
	2	3	11	58

بما أن باقي القسمة يساوي 58 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 58$



تـــأكـد :-

مثال 1

أوجد $f(-2)$ ، $f(4)$ لكل من الدالتين الآتيتين مستعملاً التعويض التركيبي:

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10 \quad (2$$

-2	1	8	1	-4	-10
	↓	-2	-12	22	-36
	1	6	-11	18	-46

بما أن باقي القسمة يساوي 46- ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(-2) = -46$

4	1	8	1	-4	-10
	↓	4	48	196	768
	1	12	49	192	758

بما أن باقي القسمة يساوي 758 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4)=758$

تـــأكـد :-

مثال 2

3) جوارح: يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة،

$$p(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$$

حيث x عدد السنوات منذ عام 1390، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1438؟

$$p(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$$

$$= -0.16(48)^3 + 15.83^2(48) - 154.15(48) + 1147.97$$

$$= 12526$$

تـــأكـد :-

مثال 3

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \;\; ; \; x - 1$

1	1	-6	11	-6
	↓	1	-5	6
	1	-5	6	0

ناتج القسمة يساوي الصفر نعم عامل من عواملها

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 5x + 6)(x - 1)$$

$$= (x - 2)(x - 3)(x - 1)$$

تـــأكـد :-

مثال 3

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16 \; ; x + 1$

-1	1	1	-16	-16
	↓	-1	0	16
	1	0	-16	0

ناتج القسمة يساوي الصفر نعم عامل من عواملها

نستخدم التحليل لإيجاد العوامل الأخرى

$$x^3 + x^2 - 16x - 16 = (x^2 - 16)(x + 1)$$

$$= (x - 4)(x + 4)(x + 1)$$



تـــأكـد :-

مثال 3

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

$$3x^3 + 10x^2 - x - 12 \ ; x - 1 \ (6$$

1	3	10	-1	-12
	↓	3	13	12
	3	13	12	0

ناتج القسمة يساوي الصفر نعم عامل من عواملها

نستخدم التحليل لإيجاد العوامل الأخرى

$$3x^3 + 10x^2 - x - 12 = (3x^2 + 13x + 12)\ (x - 1)$$

$$= (x + 3)(3x + 4)\ (x - 1)$$

تـــأكـد :-

مثـال 3

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

$2x^3 - 5x^2 - 28x + 15 \; ; \; x + 3$ (7

-3	2	-5	-28	15
	↓	-6	33	-15
	2	-11	5	0

ناتج القسمة يساوي الصفر نعم عامل من عواملها

نستخدم التحليل لإيجاد العوامل الأخرى

$$2x^3 - 5x^2 - 28x + 15 = (2x^2 - 11x + 5)(x + 3)$$

$$= (x - 5)(2x - 1)(x + 3)$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

8) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

2	1	2	-3	1
	↓	2	8	10
	1	4	5	11

بما أن باقي القسمة يساوي 11 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(2) = 11$

-5	1	2	-3	1
	↓	-5	15	-60
	1	-3	12	-59

بما أن باقي القسمة يساوي 59- ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(-5) = -59$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

أوجد $f(2)$ ، $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

$$f(x) = x^2 - 8x + 6 \quad (9$$

2	1	-8	+6
		+2	-12
	1	-6	-6

F(2) =-6

-5	1	-8	+6
		- 5	+65
	1	-13	71

F(-5) = 71



تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 1

أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

$f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12$ (10 1707 ; 62

2	3	1	-2	1	12
		6	14	24	50
	3	7	12	25	62

$\mathcal{F}(2) = 62$

-5	3	1	-2	1	12
		-15	70	-340	1695
	3	-14	68	-339	1707

$\mathcal{F}(-5) = 1707$



تـدرب وحـل المسائل :–

مثال 1

أوجد $f(2)$ ، $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

-435 ; -15

$$f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5 \quad (11$$

2	2	-8	-2	5
		4	-8	-20
	2	-4	-10	-15

$\mathcal{F}(2) = -15$

-5	2	-8	-2	5
		-10	90	-440
	2	-18	88	-435

$\mathcal{F}(-5) = -435$

تـدرب وحـل المسـائل :-

مثـال 1

أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

$$f(x) = x^3 - 5x + 2 \quad (12$$

$-98 \; ; 0$

2	1	0	-5	+2
		+2	4	-2
	1	**2**	**-1**	**0**

F(2) = 0

-5	1	0	-5	2
		-5	25	-100
	1	-5	20	-98

F(-5) = - 98

تـدرب وحـل المسائل :-

مثال 1

أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

$$f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15 \quad (13$$

2	1	0	8	0	2	-15
		2	4	24	48	100
	1	2	12	24	50	85

$\mathcal{F}(2) = 85$

-5	1	0	8	0	2	-15
		-5	25	-165	825	-4135
	1	-5	33	-165	827	-4150

$\mathcal{F}(-5) = -4150$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

أوجد $f(2)$ ، $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

$$f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10 \quad (14$$

2	1	0	-4	0	3	0	-10
		2	4	0	0	6	12
	1	2	0	0	3	6	2

$\mathcal{F}(2) = 2$

-5	1	0	-4	0	3	0	-10
		-5	25	-105	525	-2640	13200
	1	-5	21	-105	528	-2640	13190

$\mathcal{F}(-5) = 131902$



تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 1

أوجد $f(2)$ ، $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي؟

$$f(x) = x^4 - 6x - 8 \quad (15$$

647 ; −4

2	1	0	0	-6	-8
		2	4	8	4
	1	2	4	2	-4

$\mathcal{F}(2) = -4$

-5	1	0	0	-6	-8
		-5	25	-125	655
	1	-5	25	-131	647

$\mathcal{F}(-5) = 647$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

16) وقود: يقدر استهلاك سيارة للوقود (بالميل لكل جالون) وفقاً للدالة

$f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$

حيث x سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة. حدد استهلاك السيارة للوقود إذا سارت بالسرعات الآتية

$60mi/h$ ، $50mi/h$ ، $40mi/h$.

$f(40) =$ 29.5 ميلا لكل جالون

$f(50) =$ 29.87 ميلا لكل جالون

$f(60) =$ 28.1 ميلا لكل جالون



تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال

3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

$$x^3 - 3x + 2 \;; x + 2 \quad (17$$

-2	1	0	-3	2
		-2	4	-2
	1	-2	1	0

$x+2$ عامل من العوامل

العامل الآخر $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$



تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال

3 **في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لا ثم أوجد عواملها الأخرى:**

$x^4 + 2x^3 - 8x - 16 \; ; x + 2$ (18

-2	1	2	0	-8	-16
		-2	0	0	16
	1	0	0	-8	0

→ $x+2$ عامل من العوامل

العامل الآخر $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال

3 **في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:**

$$x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2 \quad (19$$

-2	1	-1	-10	-8
		-2	6	8
	1	-3	-4	0

$x+2$ عامل من العوامل

العوامل الأخرى $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$



تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال

3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عوامله الأخرى:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3\ ;\ x - 3\ (20$$

3	1	-1	- 5	-3
		3	6	3
	1	2	1	0

0 ← x - 3 عامل من العوامل

العوامل الأخرى $x^2+2x+1 = (x+1)(x+1)$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 3

في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عوامِلها الأخرى:

$2x^3 + 17x^2 + 23x - 42 \;; x - 1$ (21

1	2	17	23	-42
		2	19	42
	2	19	42	0

$x+1$ عامل من العوامل

العوامل الأخرى $2x^2 + 19x + 42 = (x + 6)(2x + 7)$



تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال

3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

$$2x^3 + 7x^2 - 53x - 28 \quad ;x - 4 \quad (22$$

4	2	7	-53	- 28
		8	60	28
	2	15	7	0

→ $X+2$ عامل من العوامل

العوامل الأخرى $2x^2+15x+7 = (2x+1)(x+7)$



تـدرب وحـل المسـائل :ـ

مثـال

3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \;;x - 1 \quad (23$$

1	1	2	2	-2	-3
		1	3	5	3
	1	3	5	3	0

0 ← $X+1$ عامل من العوامل

العوامل الأخرى $X^3 + 3X^2 + 5X + 3 = (X^2 + 2X + 3)(X + 1)$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال

3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad ; x + 2$ (24

-2	1	2	-1	-2
		-2	0	2
	1	0	-1	0

$X+2$ عامل من العوامل

العوامل الأخرى $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

تدرب وحل المسائل :-

مثال

3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

25) $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8 \quad ; 2x + 1$

$\frac{-1}{2}$	3	-12.5	1	4
		-1.5	7	-4
	3	-14	8	0

→ $2x+1$ عامل من العوامل

العوامل الأخرى $3x^2 - 14x + 8 = (3x - 2)(x - 4)$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال

3 في كلٍّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى ، حدد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لاثم أوجد عواملها الأخرى:

$16x^5 - 32x^4 - 81x + 162 \quad ;2x - 3$ (26

$x - 2 \ , \ 2x + 3 \ , \ 4x^2 + 9$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 3

27) زوارق: تحرك زورق بخاري من السكون في اتجاه معاكس للأمواج، فإذا كانت سرعته بالأقدام لكل ثانية تعطى بالدالة $f(t) = -0.04t^4 + 0,8t^3 + 0.5t^2 - t$ ، حيث t الزمن بالثواني.

a) فأوجد سرعة الزورق بعد مرور زمن : $1s, 2s, 3s$.

$$0.26ft/s \quad , \quad 5.76ft/s \quad , \quad 19.86ft/s$$

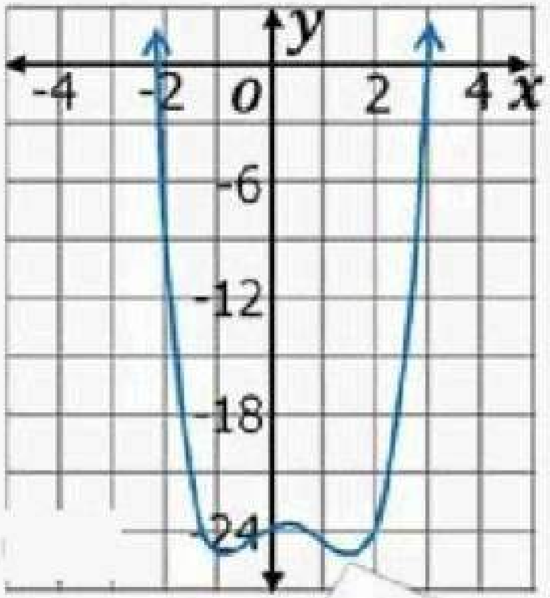
b) إذا استغرق الزورق $6s$ ليقطع المسافة بين عوامتين أثناء تسارعه فأوجد $f(6)$ مستعملاً التعويض التركيبي ووضح ماذا يعنى ذلك.

$132,96ft/s$، وهذا يعني أن الزورق يسير بسرعة $132.96ft/s$ عندما مر بالعوامة الثانية.

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 3

استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:



$f(x)=x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

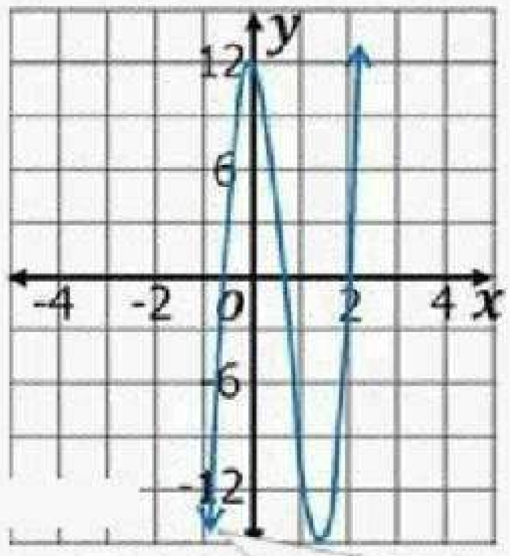
$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$$

$$x^2 - x + 4 \quad ، \quad x - 3 \,, \quad x + 2$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:



$f(x)=20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

$5x + 2$ ، $4x - 3$, $x - 2$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 3

30) تمثيلات متعددة: لتكن الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2$.

a) جبرياً: إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على $(x - 2)$.

2	1	0	-4	0	0
	↓	2	4	0	0
	1	2	0	0	0

$$g(x) = x^3 + 2x^2$$

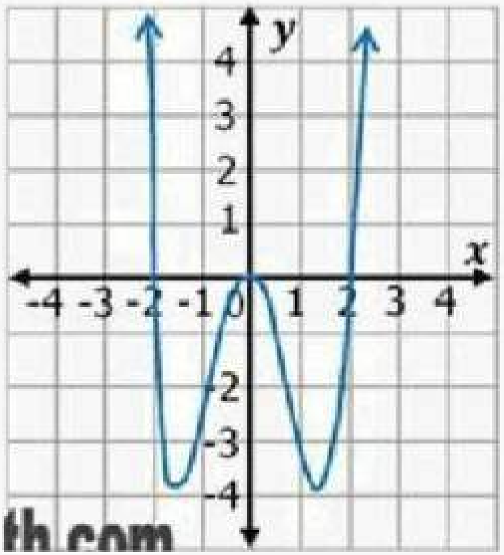
b) جدولياً: كوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث $x \in \{-2 , -1 , 0, 1 ,2\}$.

x	$g(x)$
-2	0
-1	1
0	0
1	3
2	16

تـدرب وحـل المسائل :-

c) تحليلياً: اعتماداً على جدول القيم الذي كونته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن نتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$ ؟ وضح إجابتك.

$(x+2)$ عامل من عوامل الدالة x عامل من عوامل الدالة.



d) بيانياً: مثل الدالة الأصلية بيانياً لتؤكد الاستنتاجات التي توصلت إليها.

تـدرب وحـل المسائل :-

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3 :

31) $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

$$(1)^2 - (1) + k = 3$$

$$k = 3$$

تدرب وحل المسائل :-

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3 :

$(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$ (32

$$(2)^2 + (2)k - 17 = 3$$

$$4 + 2k - 17 = 3$$

$$2k = 16$$

$$k = 8$$



تدرب وحل المسائل :-

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3 :

33) $(x^2 + 5x + 7) \div (x - k)$

$$k^2 + 5k + 7 = 3$$

$$k^2 + 5k + 4 = 0$$

$$k = 4 \quad ، \quad k = 1$$



تـدرب وحـل المسائل :–

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3 :

$$(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$$ (34

$$(-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) + k = 3$$

$$8 + 16 - 2 + k = 3$$

$$k = -3$$

الفهرس

٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

فيما سبق:

درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية. (الدرس 2 - 3)

والآن:

- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية للدالة.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

المفردات:

النظرية الأساسية في الجبر
Fundamental Theorm of Algebra



لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالةَ:
$g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$،
لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.



الفصل الثالث

٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

ملخص المفهوم — الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود،

فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x.

مثال: افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.

فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

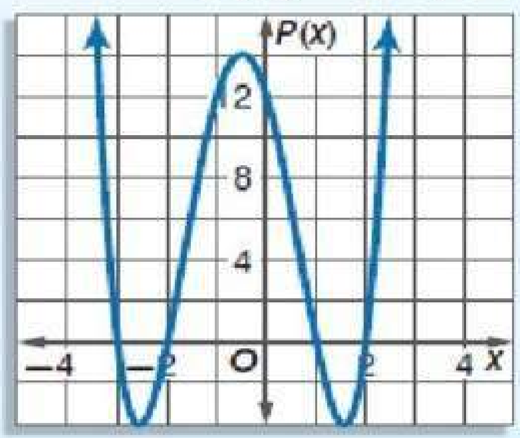
هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي: $(x+3), (x+2), (x-1), (x-2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x

هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.



٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.



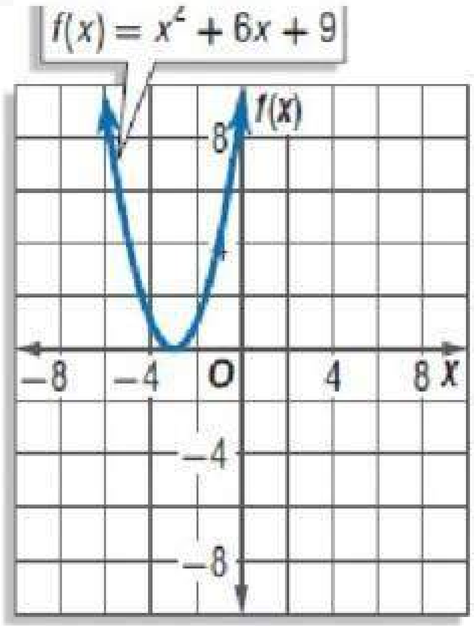
٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

مثال 1 تحديد عدد الجذور وأنواعها

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$



$x^2 + 6x + 9 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 3 = 0$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = -3$	أوجد قيمة x

وبما أن العامل $(x + 3)$ مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود، فإن -3 جذر مكرر مرتين. أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3 .

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما $x = -3$. فإن -3 جذر مكرر مرتين. ✓

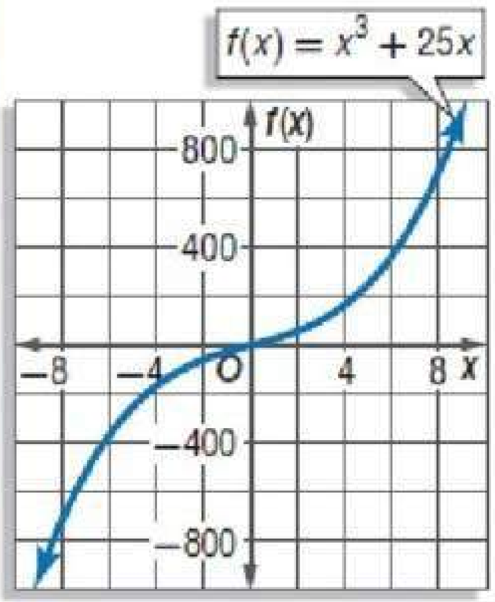
٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

مثال 1 تحديد عدد الجذور وأنواعها

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

b) $x^3 + 25x = 0$



$x(x^2+25) = 0$ حلّل إلى العوامل

$x = 0$ أو $x^2 + 25 = 0$ خاصيّة الضرب الصفري

$x^2 = -25$ اطرح 25 من كلا الطرفين

$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$ خاصية الجذر التربيعي، ثم التبسيط

للمعادلة ثلاثة جذور: جذر حقيقي واحد هو 0، وجذران تخيليان هما $5i$, $-5i$.

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x عندما $x = 0$ ،
فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًا واحدًا هو 0. ✓

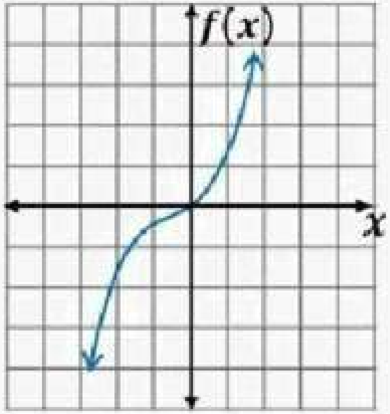
تحقق من فهمك :-

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها وأنواعها:

$x^3 + 2x = 0$ (1A

$$x^3 + 2x = 0$$
$$x(x^2 + 2) = 0$$
$$x^2 + 2 = 0 \quad ، \quad x = 0$$
$$x = \pm\sqrt{2}\, i$$

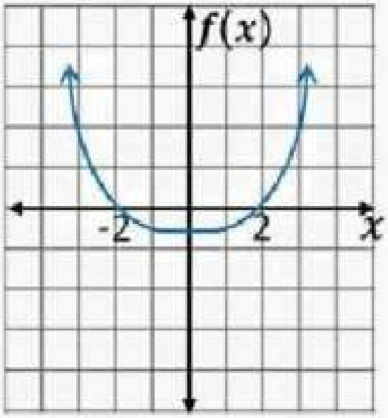
للمعادلة جذر حقيقي واحد هو 0 ، وجذران تخيليان هما $\sqrt{2}\, i$ ، $-\sqrt{2}\, i$



$x^4 - 16 = 0$ (1B

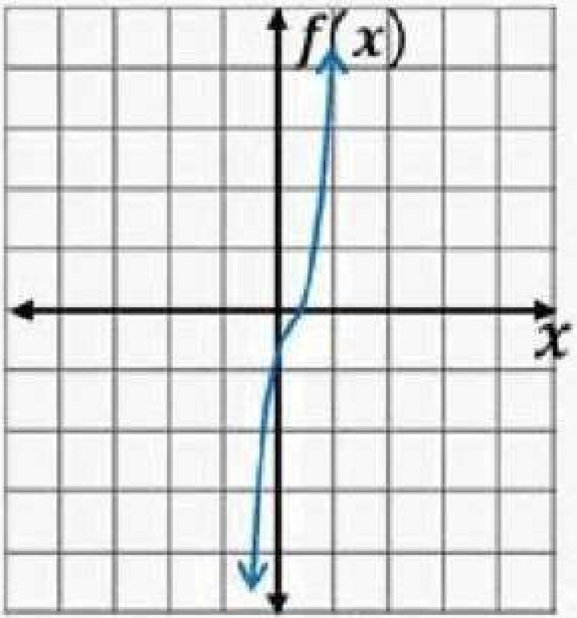
$$x^4 - 16 = 0$$
$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$
$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$
$$x^2 + 4 = 0 \quad ، \quad x = \pm 2$$
$$x = \pm 2i$$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان.



تحقق من فهمك :ـ

1C) $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$



$$(3x^3 - x^2) + (9x - 3) = 0$$

$$x^2(3x - 1) + 3(3x - 1) = 0$$

$$(3x - 1)(x^2 + 3) = 0$$

$x = \frac{1}{3}$ ، $x = \pm i\sqrt{3}$

للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان.



٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

اختبر حُلّ كلّ معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:	$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
	3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار المركبة.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

الفصل الثالث

٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$، أو أقل منه بعدد زوجي.



الفصل الثالث

٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

مثال 2 إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية لدالة

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة
$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

بما أن درجة الدالة $f(x)$ تساوي 6، فإن لها 6 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما. استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$$

$x^6 \to 3x^5$	$3x^5 \to 4x^4$	$4x^4 \to 6x^3$	$6x^3 \to x^2$	$x^2 \to 8x$	$8x \to 5$
لا	نعم	لا	نعم	نعم	نعم
+ +	+ −	− −	− +	+ −	− +

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5$$
$$= x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 5$$

$x^6 \to 3x^5$	$3x^5 \to 4x^4$	$4x^4 \to 6x^3$	$6x^3 \to x^2$	$x^2 \to 8x$	$8x \to 5$
نعم	لا	نعم	لا	لا	لا
+ −	− −	− +	+ +	+ +	+ +



٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون: 2 أو 0.

أنشئ جدولاً يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحًا منه مجموع عدد الأصفار الحقيقية
4	2	0
	0	2
2	2	2
	0	4
0	2	4
	0	6



تحقق من فهمك :ـ

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة:

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
2	3	0	5
2	1	2	
0	3	2	
0	1	4	

1) عدد الأصفار: 5

2) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 2 أو 0

3) عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 3 أو 1

4) عدد الأصفار الحقيقية و التخيلية الممكنة:



٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلًا إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي — **نظرية الأصفار المركبة المترافقة** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.



الفصل الثالث

٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

مثال 3 استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 5-i$ من أصفارها .

افهم: **المعطيات:** العددان $-1, 5-i$ من أصفار كثيرة حدود.

المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددان $-1, 5-i$ من أصفارها.

خطط: بما أن $5-i$ صفر للدالة، فإن $5+i$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المركبة المترافقة.

لذا فإن $x-(5+i)$, $x-(5-i)$, $x+1$ عوامل لكثيرة الحدود.

الفصل الثالث

٣-٨ الجذور والأصفار

Roots and Zeros

حل: اكتب دالة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x+1)[x-(5-i)][x-(5+i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

اكتب المعادلة	$P(x) = (x+1)\,[x-(5-i)][x-(5+i)]$
أعد تجميع الحدود	$= (x+1)\,[(x-5)+i][(x-5)-i]$
الفرق بين مربعين	$= (x+1)\,[(x-5)^2 - i^2]$
أوجد مربع الحدين	$= (x+1)\,[(x^2-10x+25-(-1)]$
بسّط	$= (x+1)\,(x^2-10x+26)$
اضرب	$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$
اجمع الحدود المتشابهة	$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$



تحقق من فهمك :–

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $1+2i$ ، -1 من أصفارها.

$$f(x) = (x+1)[x-(1+2i)][x-(1-2i)]$$

$$=(x+1)[(x-1)-2i][(x-1)+2i]$$

$$=(x+1)[(x-1)^2-(2i)^2]$$

$$=(x+1)[x^2-2x+1+4]$$

$$=(x+1)[x^2-2x+5]$$

$$=x^3-2x^2+5x+x^2-2x+5$$

$$=x^3-x^2+3x+5$$

تـــأكـد :-

مثـال 1

حل كل معادلة مما يأتي، وأذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (1$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

$-2 , 5$ ؛ جذران حقيقيان

تـــأكـد :–

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، وأذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$x^3 + 12x^2 + 32x = 0 \quad (2$$

$$x^3 + 12x^2 + 32x = 0$$

$$x\,(x^2 + 12x + 32) = 0$$

$$x\,(x + 8)(x + 4) = 0$$

$0\ ,\ -4\ ،\ -8$ ؛ 3 جذور حقيقية.

تــــأكــد :-

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، وأذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$16x^4 - 81 = 0 \quad (3$$

$$16x^4 - 81 = 0$$

$$(4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = 0$$

$$(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9) = 0$$

$\pm\frac{3}{2}i$, $\pm\frac{3}{2}$ جذران حقيقيان وجذران تخيليان

تـــأكـد :-

مثـال 1

حل كل معادلة مما يأتي، وأذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$x^3 - 8 = 0 \quad (4$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$2 \quad , \quad -1 + i\sqrt{3} \quad , \quad -1 - i\sqrt{3}$$

جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان.

تــــأكـد :-

مثال 2

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6 \quad (5$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6 \quad (5$$

+نعم-　　-نعم+　　+نعم-

$$\mathcal{F}(-x) = -x^3 - 2x^2 - 2x - 6$$

-لا-　　-لا-　　-لا-

3 أو 1 ، 0 ، 0 أو 2

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية
3	0	0
1		2

تــــأكـد :-

مثال 2

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7 \quad (6$$

+لا+   -نعم+   -لا-   -لا-

$$\mathcal{F}(-x) = 6x^4 - 4x^3 - x^2 + 5x - 7$$

+نعم-   -لا-   -نعم+   +نعم-

1 ، 1 أو 3 ، 0 أو 2

عدد الأصفار الموجبة	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار التخيلية
1	3	0
	1	2

تـــأكـد :-

مثال 2

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4 \quad (7$$

$$f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4 \quad (7$$

+نعم-　　-نعم+　　-نعم+

$$\mathcal{F}(-x) = -3x^5 + 8x^3 - 2x - 4$$

-نعم+　　+نعم-　　-لا-

عدد الأصفار التخيلية	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار الموجبة
0	2	3
2	0	
2	2	1
4	0	

1 أو 3 ، 0 أو 2 ، 0 أو 2 أو 4

تـــأكـد :-

مثال 2

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

$f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$ (8

$f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$ (8

-لا- -لا- -لا-

$\mathcal{F}(-x) = -2x^4 + 3x^3 + 2x - 5$

-نعم+ +لا+ +نعم-

0 ، 0 أو 2 ، 2 أو 4

عدد الأصفار التخيلية	عدد الأصفار السالبة	عدد الأصفار الموجبة
2	2	0
4	0	

تـــأكـد :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$4 \quad , \quad -1 \quad , \quad 6$$

$$h(x) = (x-4)(x+1)(x-6)$$

$$=(x^2 + x - 4x - 4)(x-6)$$

$$=(x^2 - 3x - 4)(x-6)$$

$$= x^3 - 9x^2 + 14x + 24$$

تـــأكـد :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

3 , −1 , 1 , 2

$$f(x) = (x-3)(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$=(x^2-2x-3)\ (x^2-3x+2)$$

$$=x^2(x^2-2x-3)-3x(x^2-2x-3)+2(x^2-2x-3)$$

$$=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$$

تـــأكـد :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$-2 \quad , \quad 5 \quad , \quad -3i$$

$$p(x) = (x+2)(x-5)(x-3i)(x+3i)$$

$$=(x^2-3x-10)(x^2+9)$$

$$=x^4-3x^3-x^2-27x-90$$

تــــأكــد :-

مثـال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$-4 \quad , \quad 4 + i$$

$$f(x) = (x + 4)[x - (4 + i)][x - (4 - i)]$$

$$= (x + 4)[(x - 4) - i)][(x - 4) + i]$$

$$= (x + 4)[(x - 4)^2 + 1]$$

$$= (x + 4)(x^2 - 8x + 17)$$

$$= x^3 - 4x^2 - 15x + 68$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$4x^2 + 1 = 0$ (17

$$4x^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 = -1$$

$$x^2 = \frac{-1}{4}$$

$x = \pm \frac{1}{2}i$ ؛ جذران تخيليان

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$2x^2 - 5x + 14 = 0 \quad (18$$

$a = 2$, $b = -5$, $c = 14$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x = \dfrac{5 \pm i\sqrt{87}}{4}$ ؛ جذران تخيليان

تدرب وحل المسائل :–

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$-3x^2 - 5x + 8 = 0$ (19

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$(x - 1)(3x + 8) = 0$$

$\frac{-8}{3}$ ، 1 ؛ جذران حقيقيان

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$8x^3 - 27 = 0 \ (20$$

$$8x^3 - 27 = 0$$

$$(2x)^3 - (3)^3 = 0$$

$$(2x-3)(4x^2+6x+9) = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4} \ , \quad x = \frac{3}{2} \ ;$$

جذر حقيقي، وجذران تخيليان

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$16x^4 - 625 = 0$ (21

$$16x^4 - 625 = 0$$

$$(2x)^4 - (5)^4 = 0$$

$$[(2x)^2 - (5)^2]\,[(2x)^2 + (5)^2] = 0$$

$$[(2x-5)(2x+5)]\,[4x^2 + 25] = 0$$

$x = \pm\frac{5}{2}$ ، $x = \pm\frac{5}{2}i$ ؛

جذران حقيقيان، وجذران تخيليان

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$x^3 - 6x^2 + 7x = 0 \quad (22$$

$$x(x^2 - 6x + 7) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$3 - \sqrt{2}$, $3 + \sqrt{2}$, 0 ؛ ثلاث جذور حقيقية

تـدرب وحـل المسائل :ــ

مثــال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$x^5 - 8x^3 + 16x = 0 \quad (23$$

$$x(x^4 - 8x^2 + 16) = 0$$

$$x[(u)^2 - 8u + 16\,] = 0$$

$$x(u - 4)(u - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x^2 = 4 \quad , \quad x^2 = 4$$

$2 \quad , \quad 2 \quad , \quad 0 \quad , \quad -2 \quad , \quad -2$ ؛ خمسة جذور حقيقية

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

$$x^5 + 2x^3 + x = 0 \quad (24$$

$$x(x^4 + 2x^2 + 1) = 0$$

$$x(u^2 + 2u + 1) = 0$$

$$x(u + 1)(u + 1) = 0$$

$$x = 0 \;,\; x^2 = -1 \;,\; x^2 = -1$$

$i , i , -i , -i$ ، 0 ؛ جذر حقيقي و 4 جذور تخيلية

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7 \quad (25$$

0 أو 2 ، 0 أو 2 ، 0 أو 2 أو 4

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

26) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$

0 أو 2 ، 1 ، 0 أو 2

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$5 , -2 , -1$$

$$y = (x - 5)(x + 2)(x + 1)$$

$$y = (x^2 - 3x - 10)(x + 1)$$

$$y = x(x^2 - 3x - 10) + 1(x^2 - 3x - 10)$$

$$y = x^3 - 3x^2 - 10x + x^2 - 3x - 10$$

$$y = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$-4\ ,\ -3\ ,\ 5$$

$$y = (x + 4)(x + 3)(x - 5)$$

$$y = (x^2 + 7x + 12)(x - 4)$$

$$y = x(x^2 + 7x + 12) - 5(x^2 + 7x + 12)$$

$$y = x^3 + 7x^2 + 12x - 5x^2 - 35x - 60$$

$$y = x^3 + 2x^2 - 23x - 60$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$-1 , -1 , 2i$$

$$y = (x + 1)(x + 1)(x - 2i)(x + 2i)$$

$$y = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 4)$$

$$y = x^2(x^2 + 2x + 1) + 4(x^2 + 2x + 1)$$

$$y = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x^2 + 8x + 4$$

$$y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$-3 , 1 , -3i$$

$$y = (x+3)(x-1)(x-3i)(x+3i)$$

$$y = (x^2+2x-3)(x^2+9)$$

$$y = x^2(x^2+2x-3)+9(x^2+2x-3)$$

$$y = x^4+2x^3-3x^2+9x^2+18x-27$$

$$y = x^4+2x^3+6x^2+18x-27$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$-2 \quad , \quad -3 \quad , \quad 4-3i$

$$y = (x+3)(x+2)(x-4+3i)(x-4-3i)$$

$$y = (x^2+5x+6)(x^2-8x+25)$$

$$y = x^2(x^2-8x+25)+5x(x^2-8x+25)+6(x^2-8x+25)$$

$$y = x^4-8x^3+25x^2+5x^3-40x^2+125x+6x^2-48x+150$$

$$y = x^4-3x^3-9x^2+77x+150$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$0 , \quad -5 \quad , \quad 3+i$$

$$y = (x - 0)(x + 5)(x - 3 - i)(x - 3 + i)$$

$$y = (x^2 + 5x)(x^2 - 6x + 10)$$

$$y = x^4 - x^3 - 20x^2 - 50x$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$$-2 \quad , \quad -3 \quad , \quad 4-3i$$

$$y = (x+2)(x+3)(x-4+3i)(x-4-3i)$$

$$y = (x^2+5x+6)(x^2-8x+25)$$

$$y = x^2(x^2-8x+25) + 5x(x^2-8x+25) + 6(x^2-8x+25)$$

$$y = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 77x + 150$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

أرباح: قدر مدير الإنتاج في مصنع للأجهزة الإلكترونية أن الربح الذي يحققه المصنع من إنتاج x جهاز يعطى بالدالة: $p(x) = -0.006x^4 + 0.15x^3 - 0.05x^2 - 1.8x$

a) ما عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لهذه الدالة؟

2 أو 0 ، 1 ، 1 أو 3

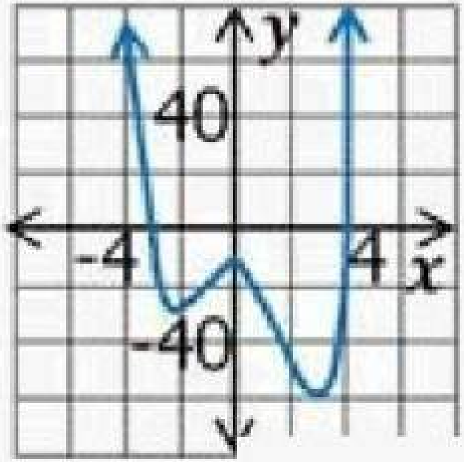
b) ماذا تعني الأصفار في هذه الحالة؟

تمثيل الجذور غير السالبة عدد الأجهزة المنتجة يومياً دون أن يحقق المصنع ربحاً.

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

أكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

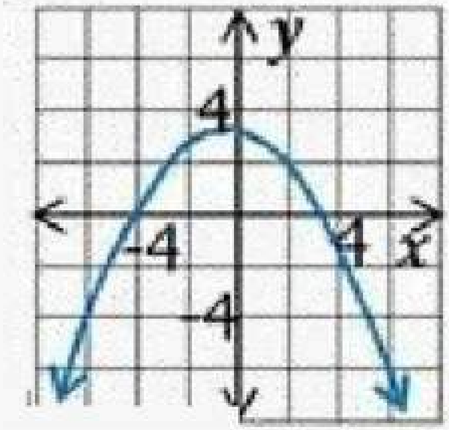


$-3 , 4 , i , -i$ (a

تدرب وحل المسائل :–

مثال 3

أكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

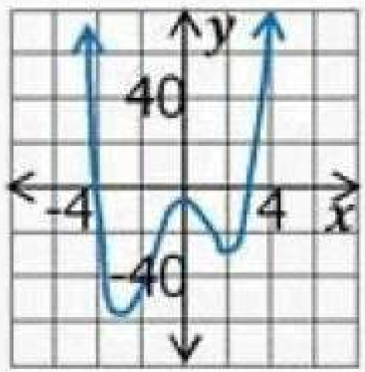


$-4 , 3$ (b

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

أكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

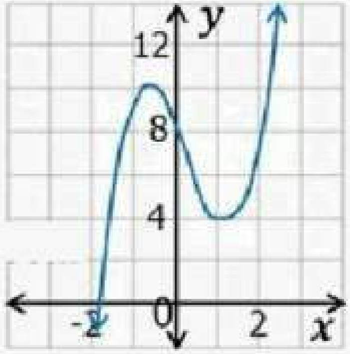


$-4 ,3 , i , -i$ (c

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الممثلتين بيانياً فيما يأتي، ووضح إجابتك.



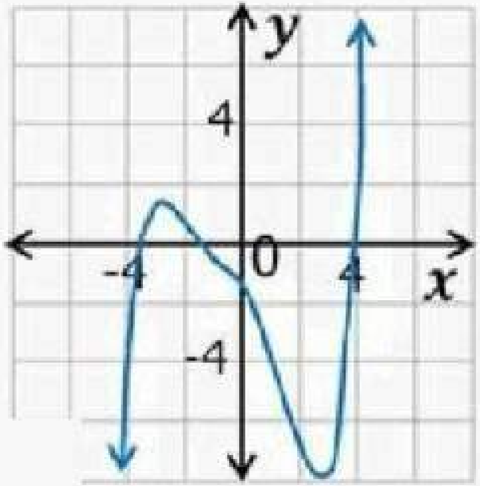
الدرجة: 3

ليس هناك جذور حقيقية موجبه هناك جذر حقيقي سالب وهناك جذران تخيليان إجابة ممكنة: لا يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور x ، ويقطع الجزء السالب منه مره واحدة. ولأن درجة كثيرة الحدود 3 ، لذا فأن للدالة صفرين تخيلين.

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الممثلتين بيانياً فيما يأتي، ووضح إجابتك.



الدرجة: 5

هناك جذر حقيقي موجب، و جذران حقيقيان سالبان وجذران تخيليان . إجابة ممكنة: يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور x مره واحدة ويقطع الجزء السالب مرتين، ولأن درجة كثيرة الحدود 5 ، لذا فإن للدالة صفرين تخيلين.

$4x^2 + 1 = 0$ (17

$$4x^2 + 1 = 0$$

$$4x^2 = -1$$

$$x^2 = \frac{-1}{4}$$

جذران تخيليان ؛ $x = \pm \frac{1}{2} i$

$2x^2 - 5x + 14 = 0$ (18

$a = 2 \;,\; b = -5 \;,\; c = 14$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

جذران تخيليان ؛ $x = \frac{5 \pm i\sqrt{87}}{4}$

$-3x^2 - 5x + 8 = 0$ (19

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$(x - 1)(3x + 8) = 0$$

جذران حقيقيان ؛ 1 ، $\frac{-8}{3}$

$8x^3 - 27 = 0$ (20

$$8x^3 - 27 = 0$$

$$(2x)^3 - (3)^3 = 0$$

$$(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 0$$

؛ $x = \frac{3}{2} \;,\; x = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$

جذر حقيقي، وجذران تخيليان

$16x^4 - 625 = 0$ (21

$$16x^4 - 625 = 0$$

$$(2x)^4 - (5)^4 = 0$$

$$[(2x)^2 - (5)^2]\,[(2x)^2 + (5)^2] = 0$$

$$[(2x - 5)(2x + 5)]\,[4x^2 + 25] = 0$$

؛ $x = \pm \frac{5}{2}$ ، $x = \pm \frac{5}{2} i$

جذران حقيقيان، وجذران تخيليان

$x^3 - 6x^2 + 7x = 0$ (22

$x(x^2 - 6x + 7) = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$0\ ,\ 3 + \sqrt{2}\ ,\ 3 - \sqrt{2}$ ؛ ثلاث جذور حقيقية

$x^5 - 8x^3 + 16x = 0$ (23

$x(x^4 - 8x^2 + 16) = 0$

$x[(u)^2 - 8u + 16] = 0$

$x(u - 4)(u - 4) = 0$

$x = 0\ ,\ x^2 = 4\ ,\ x^2 = 4$

$-2\ ,\ -2\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 2$ ؛ خمسة جذور حقيقية

$x^5 + 2x^3 + x = 0$ (24

$x(x^4 + 2x^2 + 1) = 0$

$x(u^2 + 2u + 1) = 0$

$x(u + 1)(u + 1) = 0$

$x = 0\ ,\ x^2 = -1\ ,\ x^2 = -1$

0 ، $-i\ ,-i\ ,i\ ,i$ ؛ جذر حقيقي و 4 جذور تخيلية

مثال 2

أذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ (25

0 أو 2 ، 0 أو 2 ، 0 أو 2 أو 4

26) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$

0 أو 2 ، 1 ، 0 أو 2

27) $f(x)= -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$

0 أو 2 ، 1 ، 2 أو 4

28) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$

0 أو 2 ، 0 أو 2 ، 0 أو 2 أو 4

29) $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$

0 أو 2 ، 1 ، 2 أو 4

30) $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$

0 أو 2 ، 1 ، 2 أو 4

مثال 3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

$5 , -2 , -1$

$y = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

$-4 , -3 , 5$

$y = x^3 + 2x^2 - 23x - 60$

$-1 , -1 , 2i$

$y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

$-3, 1, -3i$

$y = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27$

$0, -5, 3+i$

$y = x^4 - x^3 - 20x^2 - 50x$

$-2, -3, 4-3i$

$y = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 77x + 150$

أرباح: قدر مدير الإنتاج في مصنع للأجهزة الإلكترونية أن الربح الذي يحققه المصنع من إنتاج x جهاز يعطى بالدالة: $p(x) = -0.006x^4 + 0.15x^3 - 0.05x^2 - 1.8x$

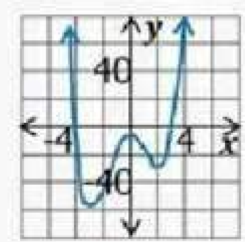
a) ما عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية لهذه الدالة؟

2 أو 0 ، 1 ، 1 أو 3

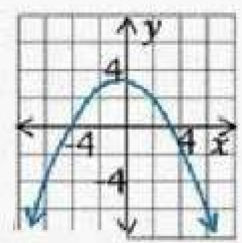
b) ماذا تعني الأصفار في هذه الحالة؟

تمثيل الجذور غير السالبة عدد الأجهزة المنتجة يومياً دون أن يحقق المصنع ربحاً.

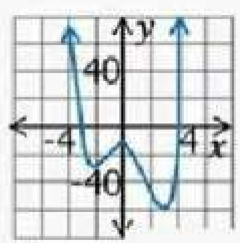
أكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:



c) $-4, 3, i, -i$

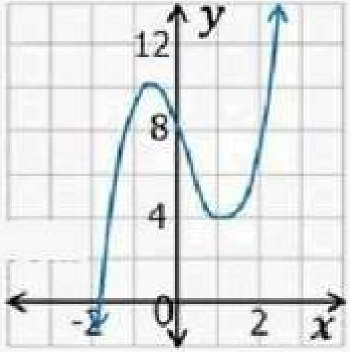


b) $-4, 3$



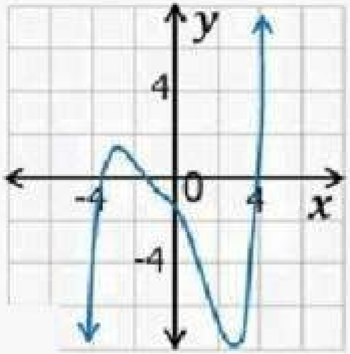
a) $-3, 4, i, -i$

حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الممثلتين بيانياً فيما يأتي، ووضح إجابتك.



الدرجة: 3

ليس هناك جذور حقيقية موجبه هناك جذر حقيقي سالب وهناك جذران تخيليان إجابة ممكنة: لا يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور x ، ويقطع الجزء السالب منه مره واحدة. ولأن درجة كثيرة الحدود 3 ، لذا فأن للدالة صفرين تخيلين.



الدرجة: 5

هناك جذر حقيقي موجب، و جذران حقيقيان سالبان وجذران تخيليان . إجابة ممكنة: يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور x مره واحدة ويقطع الجزء السالب مرتين، ولأن درجة كثيرة الحدود 5 ، لذا فإن للدالة صفرين تخيلين.

الفهرس



الفصل الثالث
٣-٩ نظرية الصفر النسبى

تحقق من فهمك :-

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين:

(1A $g(x) = 3x^3 - 4x + 10$

$$\frac{\text{عوامل } 10}{\text{عوامل } 3} \quad \pm \frac{1\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 10}{1\ ,\ 3}$$

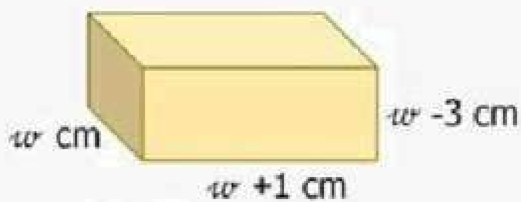
$$\pm 1 , 2 , 5 , 10 , \frac{1}{3} , \frac{2}{3} , \frac{5}{3} , \frac{10}{3}$$

(1A $h(x) = x^3 + 11x^2 + 24$

$$\frac{\text{عوامل } 24}{\text{عوامل } 1} \quad \pm \frac{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 12\ ,\ 24}{1}$$

$$\pm 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24$$

2) هندسة: منشور متوازي مستطيلات حجمه $1056cm^3$ ، ويزيد طوله بمقدار 1cm على عرضه ، ويقل ارتفاعه بمقدار 3cm عن عرضه ، أوجد أبعاده.



$$\ell w h = V$$
$$(w+1)(w)(w-3) = 1056$$
$$w^3 - 2w^2 - 3w - 1056 = 0$$

❶ للدالة 3 أصفار مركبة فقط.

+	−	i
1	2	0
1	0	2

❷

$$\frac{\text{عوامل } 8019}{\text{عوامل } 1} \pm : \frac{1,2,4,8,16,32,96,11,33,66,132,264,528,1056}{1}$$

2	5	-8	41	-72	-36
	↓	10	4	90	36
	5	2	45	18	0

❸

$$5x^3 + 2x^2 + 45x + 18 = 0$$
$$(5x^3 + 2x^2) + (45x + 18) = 0$$
$$x^2(5x + 2) + 9(5x + 2) = 0$$
$$(5x + 2)(x^2 + 9) = 0$$

لذا، فإن أصفار الدالة هي $\pm 3i$ ، $\frac{-2}{5}$ ، 2

3A) أوجد جميع أصفار الدالة: $h(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4$

❶ للدالة 4 أصفار مركبة فقط.

+	−	i
1	1	2



❷

$$\frac{4 \text{ عوامل}}{9 \text{ عوامل}} \quad \pm : \frac{1\ ,\ 2\ ,\ 4}{1\ ,\ 3\ ,\ 9}$$

$\frac{2}{3}$	3	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-4}{3}$
	↓	2	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{4}{3}$
	3	2	3	2	0

❸

$$3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$x^2(3x + 2) + (3x + 2) = 0$$
$$(3x + 2)(x^2 + 1) = 0$$

لذا، فإن أصفار الدالة هي $\pm i$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{2}{3}$

3B) أوجد جميع أصفار الدالة:

$$h(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 45x + 18$$

❶ للدالة 4 أصفار مركبة فقط.

+	−	i
4	0	0
2	0	2
0	0	4

❷

$$\frac{18 \text{ عوامل}}{2 \text{ عوامل}} \quad \pm : \frac{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 18}{1\ ,\ 2}$$

2	2	-5	20	-45	18
	↓	4	-2	36	-18
	2	-1	18	-9	0

❸

$$2x^3 - x^2 + 18x - 9 = 0$$
$$x^2(2x - 1) + 9(2x - 1) = 0$$
$$(2x - 1)(x^2 + 9) = 0$$

لذا، فإن أصفار الدالة هي $\pm 3i$, $\frac{1}{2}$, 2

تـــأكـد :-

مثال 1

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24$

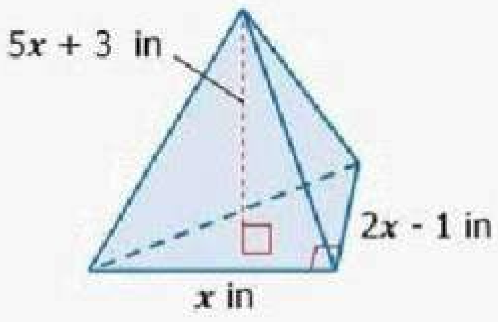
$$\frac{\text{عوامل } 24}{\text{عوامل } 1} \pm : \frac{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}{1}$$

2) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 15$

$$\frac{\text{عوامل } 15}{\text{عوامل } 2} \pm : \frac{1, 3, 5, 15}{1, 2}$$

مثال 2

3) هندسة: إذا كان حجم الهرم الثلاثي المجاور $210in^3$ فأوجد أبعاده.



$\frac{1}{3} . b . h = V$ (b مساحة القاعدة، h ارتفاع الهرم)

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(x)(2x-1)\right][5x+3] = 210$$

$$10x^3 + x^2 - 3x - 1260 = 0$$

❶ للدالة 3 أصفار مركبة فقط.

+	−	i
1	2	0
1	0	2

❷

$$\frac{1260 \text{ عوامل}}{10 \text{ عوامل}} \quad \pm : \frac{1,2,3,4,5,6,7,9,10,14,15,18,\ldots,630,1260}{1,2,5,10}$$

❸

$$10(5)^3 + (5)^2 - 3(5) - 1260 = 0$$

بما أن العدد 5 صفر حقيقي ، فلا داعي لاختبار بقية القيم.
ويكون البعدان الآخران هما:

$$2(5) - 1 = 9in \quad , \quad 5(5)+3 = 28\ in$$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدالتين الآتيتين:

(4 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$

$-3 \ , \ 2 \ , \ 7$

(5 $f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 29x + 12$ $\quad -1 \ , \ -\frac{3}{2}$



مثال 3

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

6) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5$

$\frac{5}{3} \ , \ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

7) $f(x) = 8x^3 + 14x^2 + 11x + 3$

$-\frac{1}{2} \ , \ \frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{8}$

8) $f(x) = 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12$

$-4 \ , \ \frac{3}{4} \ , \ -i \ , \ i$

9) $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 14x - 15$

$-\frac{1}{2} \ , \ \frac{3}{2} \ , \ 1 + 2i \ , \ 1 - 2i$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

أكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل دالة مما يأتي:

10) $f(x) = x^4 + 8x - 32$

$\frac{\text{عوامل } 32}{\text{عوامل } 1} \pm : \frac{1 \ , \ 2 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16 \ , \ 32}{1}$

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 10$ (11

$$\frac{\text{عوامل } 10}{\text{عوامل } 2} \pm : \frac{1\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 10}{1\ ,\ 2}$$

$f(x) = 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35$ (12

$$\frac{\text{عوامل } 35}{\text{عوامل } 3} \pm : \frac{1\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 35}{1\ ,\ 3}$$

$f(x)= 6x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 18$ (13

$$\frac{\text{عوامل } 18}{\text{عوامل } 6} \pm : \frac{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,19}{1\ ,2\ ,3\ ,6}$$

$f(x)= 8x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x + 42$ (14

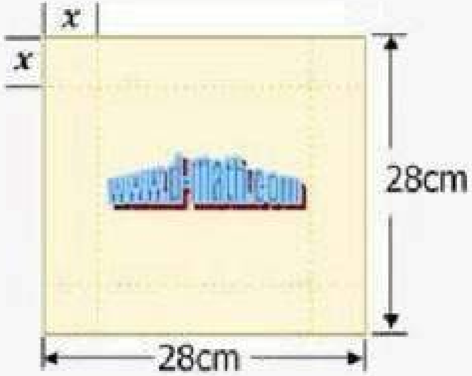
$$\frac{\text{عوامل } 42}{\text{عوامل } 8} \pm : \frac{1,2,3,6,7,14,21,42}{1\ ,2\ ,4\ ,8}$$

$f(x)= 15x^3 + 6x^2 + x + 90$ (15

$$\frac{\text{عوامل } 90}{\text{عوامل } 15} \pm : \frac{1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90}{1\ ,3\ ,5\ ,15}$$

مثال 2

16) تصنيع: يراد تصنيع صندوق بقص مربعات صغيرة متساوية في المساحة من زوايا ورقة مقواة مربعة الشكل، ثم ثني الجوانب إلى الأعلى.



a) اكتب الدالة $V(x)$ التي تمثل حجم الصندوق.

$$V(x) = (28 - 2x)(28 - 2x)(x)$$
$$= 4x^3 - 112x^2 + 784x$$

b) ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $1152cm^3$؟ 2 أو 8

c) إذا كان $x = 6cm$ فما حجم الصندوق ؟ $1536cm^3$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي:

17) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$ $-5 , -3 , -2$

18) $f(x)= 4x^4 - 3x^3 - 100x + 75$ $-5 , \frac{3}{4} , 5$

19) $f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 21x + 10$ $-\frac{1}{4}$

20) $f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8$ $-1 , 2$

21) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 16x + 4$ $-\frac{5}{2} , -2 , \frac{1}{2} , 1$

22) $f(x) = 81x^4 - 256$ $-\frac{4}{3} , \frac{4}{3}$

أوجد جميع أصفار كل دالة فيما يأتي:

$f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 9x + 2$ (23

$\frac{2}{3}$, $\frac{3- \pm \sqrt{17}}{4}$

$f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2$ (25

$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, 2

$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x$ (26

$0, 3, -i, i$

$f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$ (27

$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2$

$f(x) = 6x^4 + 22x^3 + 11x^2 - 38x - 40$ (28

-2 , $\frac{4}{3}$, $\frac{-3 \pm i}{2}$

$f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28$ (29

-2 , 2 , $\frac{7}{2}$

$f(x) = 9x^5 - 94x^3 + 27x^2 + 40x - 12$ (30

3 , $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

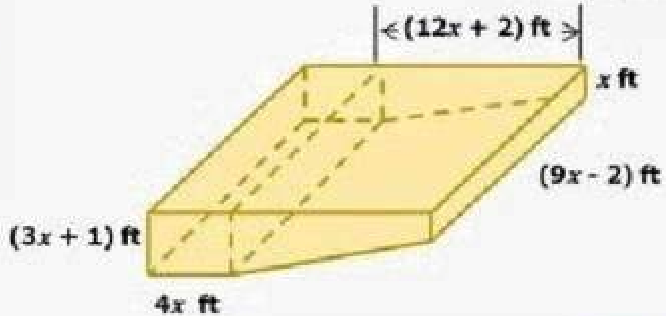
$f(x) = x^5 - 2x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 10$ (31

-1 , -2 , 5 , i , $-i$

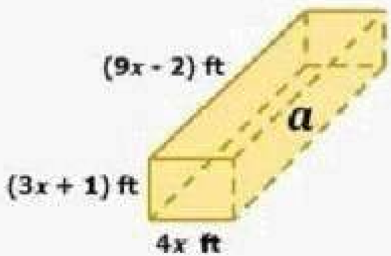
$f(x) = 48x^4 - 52x^3 + 13x - 3$ (32

$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$

33) بركة سباحة: يوضح الشكل الآتي مخطط بركة سباحة تسع $9175 ft^3$ من الماء.



a) اكتب دالة كثيرة حدود تمثل حجم البركة.

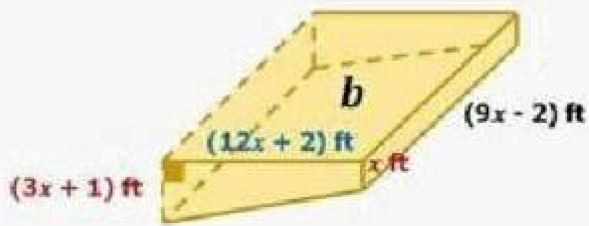


$$V(a) = (4x)(3x+1)(9x-2)$$
$$= 108x^3 + 12x^2 - 8x$$

$$V(b) = \left(\frac{3x+1+x}{2} \cdot 12x + 2\right) \cdot (9x-2)$$
$$= 216x^3 + 24x^2 - 11x - 2$$

$$V(x) = V(a) + V(b)$$
$$V(x) = 324x^3 + 54x^2 - 19x - 2$$

b) ما قيم x الممكنة؟ وأيهما مقبولة في هذه الحالة؟



$$V(x) = 9175$$
$$324x^3 + 54x^2 - 19x - 2 = 9175$$
$$324x^3 + 54x^2 - 19x - 2 - 9175 = 0$$
$$324x^3 + 54x^2 - 19x - 9177 = 0$$

جذور الدالة هي: 3 ، $\frac{-57 \pm i\sqrt{8927}}{36}$ ؛

القيمة الوحيدة المقبولة هي 3.

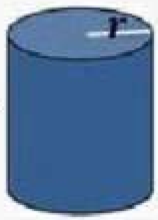
34) أفعوانة: يمكن تمثيل ارتفاع قطار أفعوانة عن مستوى الأرض في مدينة الألعاب بالدالة

$$f(t) = t^4 - 31t^3 + 308t^2 - 1100t + 1200$$

، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ ارتفاع الأفعوانة. استعمل نظرية الصفر النسبي لتحدد الأوقات الأربعة التي تكون عندها الأفعوانة عند مستوى الأرض.

ثانيتان ، 4 ثوان ، 10 ثوان ، 15 ثانية

35) يباع أحد أنواع الزيوت في عبوات أسطوانية الشكل حجم كل منها $160\pi \ in^3$ تقريباً، ويزيد ارتفاعها $6in$ على نصف قطرها.



$6 + r$

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi r^2 (r + 6)$

$V = \pi r^3 + 6\pi r^2$

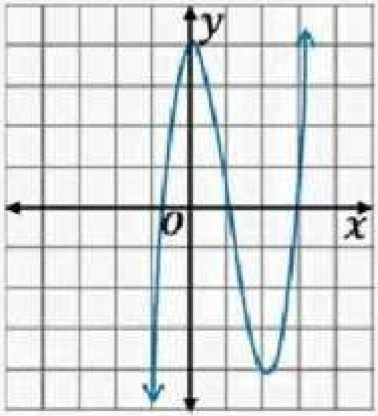
a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم عبوة الزيت مستعملاً قانون حجم الأسطوانة $V = \pi r^2 h$

b) ما قيم r الممكنة ؟ وأيهما مقبولة في هذه الحالة ؟

قيم r : $4 , -5 \pm i\sqrt{15}$. القيم المقبولة 4

c) أوجد أبعاد العبوة. $h = 10 \ in$, $r = 4 \ in$

36) اعتماداً على التمثيل البياني المجاور



a) أوجد جميع أصفار كل من الدالتين:
$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ و
.$g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$

$-1 , \frac{1}{2} , -3 \; ; \; -\frac{1}{2} , 1 , 3$

b) أي الدالتين لها التمثيل البياني المجاور f أو g ؟

$g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$

أوجد جميع أصفار كل من الدالتين الآتيتين:

37) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 19x^3 - 43x^2 + 18x + 40$

$1 , -1 , -2 , 4 , -5$

38) $f(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 + 33x^2 + 126x - 216$

$2 , 3 , 3 , -3 , -4$

الفهرس



الفصل الرابع
٤-١ العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

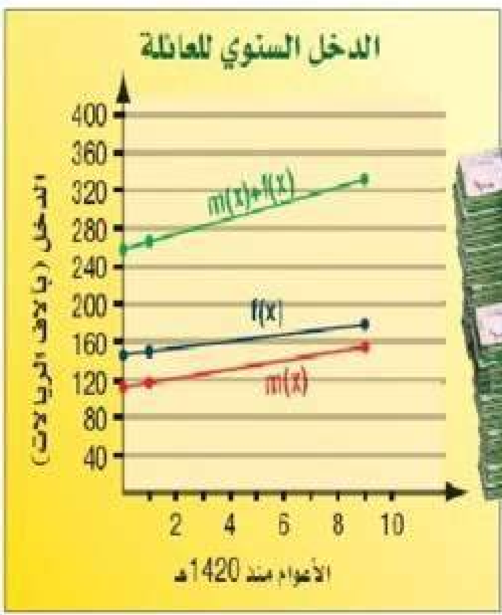
المفردات

تركيب دالتين

composition of functions

www.obeikaneducation.com

لماذا؟





تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1420هـ؛ حيث $f(x)$ تعبّر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.

العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:



الفصل الرابع

٤-١ العمليات على الدوال

Operations on Functions

مفهوم أساسي — **العمليات على الدوال** — أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x,\ g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x+5) = x + 5$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x+5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x+5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5},\ x \neq 5$

الفصل الرابع

٤-١ العمليات على الدوال

Operations on Functions

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x + 1$، فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي:

a) $(f + g)(x)$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	جمع دالتين
$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$	عوّض
$= x^2 + 2x - 3$	بسّط

b) $(f - g)(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	طرح دالتين
$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$	عوّض
$= x^2 - 2x - 5$	بسّط

تحقق من فهمك :-

1) إذا كان $f(x) = x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 3x - 2$
فأوجد كل دالة فيما يأتي:

$(f + g)(x)$ (a

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 5x - 2) + (3x - 2)$$
$$= x^2 + 8x - 4$$

$(f - g)(x)$ (b

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (x^2 + 5x - 2) - (3x - 2)$$
$$= x^2 + 5x - 2 - 3x + 2$$
$$= x^2 + 2x$$



الفصل الرابع
٤-١ العمليات على الدوال
Operations on Functions

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $f(x) = x^2 + 7x + 12$, $g(x) = 3x - 4$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

(a $(f \cdot g)(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ضرب دالتين

$= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$ عوّض

$= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$ خاصية التوزيع

$= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$ بسّط

(b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ قسمة دالتين

$= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$ عوّض

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز $\cap$.

تحقق من فهمك :-

2) إذا كان $g(x) = x + 4$, $f(x) = x^2 - 7x + 2$
فأوجد كل دالة فيما يأتي:

a) $(f.g)(x)$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$= (x^2 - 7x + 2).(x + 4)$$

$$= x(x^2 - 7x + 2) + 4(x^2 - 7x + 2)$$

$$= x^3 - 7x^2 + 2x + 4x^2 - 28x + 8$$

$$= x^3 - 3x^2 - 26x + 8$$

تحقق من فهمك :-

2) إذا كان $f(x) = x^2 - 7x + 2$, $g(x) = x + 4$ فأوجد كل دالة فيما يأتي:

b) $(f/g)(x)$

$$(f/g)(x) = f(x) \,/\, g(x)$$

$$= (x^2 - 7x + 2) \,/\, (x + 4) \quad , \quad x \neq -4$$

الفصل الرابع

٤-١ العمليات على الدوال

Operations on Functions

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

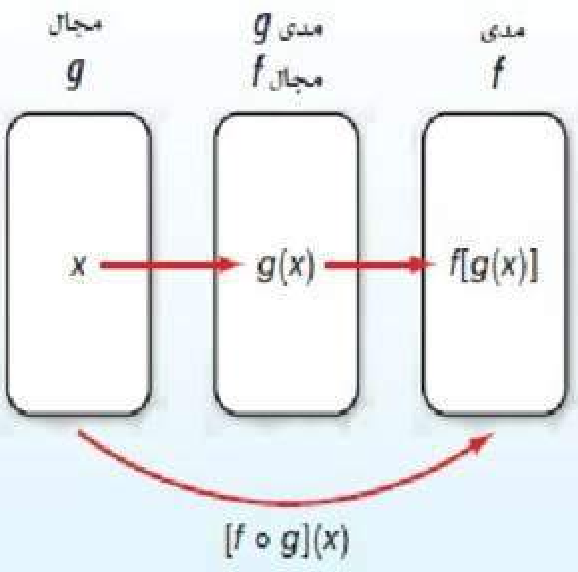
مفهوم أساسي — **تركيب دالتين**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f، فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

النموذج:





الفصل الرابع
٤-١ العمليات على الدوال
Operations on Functions

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[f \circ g](x)$ ، $[g \circ f](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

(a $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}$, $g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $f \circ g$، أوجد قيم $g(x)$ أولًا، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لإيجاد $f[g(x)]$

$g(10) = 14$ $\quad f[g(10)] = f(14) = 9$

$g(9) = 0$ $\quad f[g(9)] = f(0) = 13$

$g(8) = 15$ $\quad f[g(8)] = f(15) = 11$

$g(5) = 1$ $\quad f[g(5)] = f(1) = 8$

$$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$$

لإيجاد $g \circ f$، أوجد قيم $f(x)$ أولًا ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لإيجاد $g[f(x)]$

$f(14) = 9$ $\quad g[f(14)] = g(9) = 0$

$f(15) = 11$ $\quad g[f(15)] = g(11)$

$g(11)$ غير معرّفة

$f(1) = 8$ $\quad g[f(1)] = g(8) = 15$

$f(0) = 13$ $\quad g[f(0)] = g(13)$

$g(13)$ غير معرّفة

وبما أن 13 ، 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 11$ و $x = 13$ وبما أن $g[f(1)] = 15, g[f(14)] = 0$ ، فإن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$.

الفصل الرابع

٤-١ العمليات على الدوال

Operations on Functions

b) $f(x) = 2x - 5,\ g(x) = 4x$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب دالتين	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	عوّض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	عوّض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بسّط	$= 8x - 20$

يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

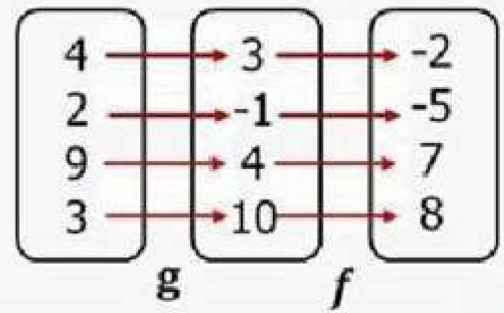
تحقق من فهمك :ــ

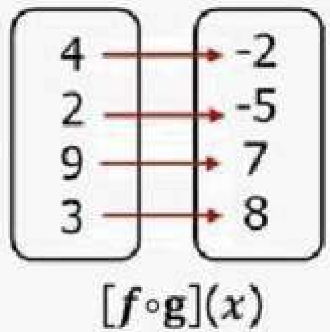
3) أوجد $[g \circ f](x)$,$[f \circ g](x)$ ،لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

3A) $f = \{(3,-2), (-1,-5), (4,7), (10,8)\}$

$g = \{(4,3), (2,-1), (9,4), (3,10)\}$

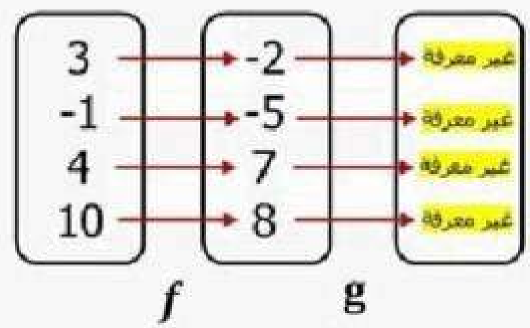
- إيجاد $[f \circ g](x)$





$f \circ g = \{(4,-2),(2,-5),(9,7),(3,8)\}$

- إيجاد $[g \circ f](x)$



$g \circ f$ غير معرفة